Introduzione

Nella prima parte del corso studieremo il comportamento qualitativo locale di funzioni differenziabili. Con ciò si intende la cosa seguente: consideriamo terne (U, f, x) in cui $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, $f : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile (tale termine significherà sempre: "differenziabile infinite volte") ed x è un punto di U.

Diremo che una tale terna è *qualitativamente equivalente* ad un'altra terna (U', f', x') se esistono aperti V, V' tali che $x \in V \subset U$, $x' \in V' \subset U'$ ed un diffeomorfismo $h : V \to V'$ tale che $f(x) = x'$ ed $f = f' \circ h$.

Una prima questione che tratteremo sarà quella di determinare casi in cui la conoscenza di parte dello sviluppo di Taylor di f in x, permette di riconoscere la classe qualitativa di (U, f, x). Ad esempio se sappiamo che $f(x) = 0$ e che qualche derivata prima di f non si annulla in x, sappiamo (per un facile corollario del teorema di inversione locale) che tale terna ha il comportamente qualitativo di $(\mathbb{R}^n, x_1, 0)$ essendo x_1 la prima coordinata su $\mathbb{R}^n$, in altre parole a tale f si possono aggiungere altre n-1 funzioni differenziabili nulle in x ed ottenere un sistema di coordinate di centro x.

Ancora con l'utilizzo del solo teorema di inversione locale si può dimostrare l'importante lemma di Morse (ragionado come per la diagonalizzazione di forme quadratiche su $\mathbb{R}$). Una seconda questione che affronteremo sarà quella di studiare il comportamento qualitativo delle funzioni "vicine" ad f: il termine "vicine" sarà precisato parlando di "deformazioni" della f, intese come funzioni differenziabili $F(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_r)$ che diano $f(x_1, ..., x_n)$ quando poniamo $t_1 = ... = t_r = 0$. Determineremo quindi le terne (U, f, x) per le quali esiste una tale deformazione dalla quale sia possibile ottenere tutte le altre per "cambiamento di parametri"; una deformazione con tale proprietà sarà allora detta *versale* (parola ottenuta da "universale" per soppressione di "uni").

La trattazione sarà organizzata nel modo seguente: in un primo momento considereremo solo le problematiche più semplici, per una trattazione delle quali è sufficiente l'uso di un teorema che chiamiamo di *divisione elementare*.

L'esempio più semplice di risultati ottenibili con esso è la seguente asserzione "ogni funzione differenziabile in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$ che abbia sviluppo di Taylor non identicamente nullo, si scrive come una delle $\pm t^n$ tramite qualche coordinata locale t. Un altro esempio ottenibile in modo "elementare" è il seguente: sia f una funzione differenziabile su $\mathbb{R}^2$ con variabili x, y e supponiamo che nell'origine:

- sia nulla assieme alle sue derivate prime
- delle derivate seconde sia non nulla la sola rispetto alla x
- delle derivate successive ne esista qualcuna non nulla in cui compare la y , ossia lo sviluppo di Taylor di f non sia una serie nella sola x

Allora esiste un sistema di coordinate locali (s, t) in 0 nelle quali f assume la forma $f(s, t) = \pm s^2 \pm t^n$ per qualche intero $n \geq 3$.

Successivamente mostreremo come un teorema di divisione non elementare (che viene detto *Teorema di divisione di Malgrange* (espresso poi nella forma in cui è stata data da Mather) permetta di trattare in modo abbastanza completo le due questioni di cui abbiamo parlato prima.

Daremo quindi la dimostrazione di tale teorema nel caso analitico, caso in cui è abbastanza facile (ed è conosciuto da due secoli con il nome di "Teorema di preparazione di Weierstrass"); indicheremo quindi come tale dimostrazione possa essere modificata (seguendo L. Nirenberg) per ottenere il teorema anche nel caso differenziabile.

Richiami di calcolo differenziale locale

In quel che segue "spazio vettoriale" significherà "spazio vettoriale reale di dimensione finita". In ogni tale spazio verrà utilizzata una norma scelta comunque tra quelle esistenti : tutto quanto verrà discusso non dipenderà dalla particolare norma utilizzata.

Gran parte dei risultati richiamati in questo paragrafo rimangono validi anche per per spazi vettoriali reali di dimensione infinita su cui sia stata fissata una norma rispetto alla quale essi siano completi: tali spazi vengono chiamati spazi di Banach. Essi vengono solitamente studiati nei corsi di Analisi; diversi esempi saranno introdotti più avanti anche in questo corso: un esempio tipico sarà dato dalla norma del sup sullo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori reali definite su uno spazio compatto. Per l'estensione del calcolo locale agli spazi di Banach bisogna richiedere esplicitamente alcuni fatti che sono automaticamente verificati in dimensione finita; Ad esempio ogni applicazione lineare $\phi : E \to F$ deve essere supposta continua e talvolta, come per gli usuali corollari del teorema di inversione locale, si deve supporre che il suo nucleo abbia un supplementare chiuso, che la sua immagine sia chiusa e sia dotata anch'essa di supplementare chiuso.

Siano V, W spazi vettoriali, $\Omega \subset V$ un aperto, $x_0 \in V$ e $f : \Omega \to W$ una applicazione. Ricordiamo che f è detta *differenziabile* in x_0 se esiste $L : V \to W$ lineare tale che posto per $h \in V$ con $x_0 + h \in \Omega$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L[h] + R(h)$$

si abbia

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{||h||} = 0$$

Si dimostra che di tali L ne esiste al più uno; se esiste esso viene detto il *differenziale* di f in x_0 ed è indicato con $df(x_0)$". Si noti l'uso di parentesi tonde e quadre: in $df(x_0)[h]$, x_0 è il punto in cui si "differenzia" ed è indicato entro parentesi tonde; in parentesi quadre indichiamo invece gli "incrementi" (una volta chiamati gli "infinitesimi"), in questo caso h, in cui il differenziale è calcolato.

Se f è differenziabile in ogni punto di Ω, si ha una applicazione

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(V, W) = Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$$

Se tale applicazione è continua diremo che f è di classe C^1 su Ω.
Induttivamente, per k intero ≥ 2, diremo che f è di classe C^k se è C^1 e df è C^{k-1}; diremo che f è C^∞ se essa è C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Ripeto che d'ora in poi il termine "differenziabile" significherà di classe C^∞.

Teorema 1 (di inversione locale) *Siano E, F spazi vettoriali, Ω un aperto in V, $f : \Omega \to F$ differenziabile ed $x \in \Omega$.*
Se $df(x) : E \to F$ è un isomorfismo, allora esiste un aperto $U \subset E$ contenente x , tale che :
a. $V = f(U)$ è aperto in F
b. $f : U \to V$ è biunivoca con inversa differenziabile.

La dimostrazione sarà supposta nota (corsi di Analisi).

Def. Siano $U \subset E$ e $V \subset F$ aperti in spazi vettoriali. Una applicazione $f : U \to V$ è detta un *diffeomorfismo* se è biunivoca e differenziabile insieme alla sua inversa. Nelle notazioni ed ipotesi del teorema pecedente diremo che f è un *diffeomorfismo locale* in $x \in \Omega$ od anche che essa è *localmente invertibile* Un diffeomorfismo sarà talvolta chiamato anche *cambiamento di coordinate.*

Corollari del teorema di inversione locale
Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, $f : \Omega \to F$ una applicazione differenziabile e sia $0 \in \Omega$, $f(0) = 0$.

a. supponiamo che $df(0) : E \to F$ sia surgettiva.
Sia $p : E \to K = ker(df(0))$ una proiezione (associata alla scelta di un supplementare di K in E). Allora l'applicazione $g : \Omega \to F \oplus K$ definita da $g(x) = (f(x), p(x))$, è localmente invertibile in 0. Essa rappresenta quindi un cambiamento di coordinate in un intorno di 0; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente la proiezione sul fattore F).

b. supponiamo che $df(x_0) : E \to F$ sia iniettiva.
Sia H un supplementare in F dell'immagine di $df(x_0)$. Allora l'applicazione $g : E \oplus H \to F$ definita da $g(x, h) = f(x) + h$ è localmente invertibile in 0. Essa definisce quindi un cambiamento di coordinate nell'origine di F; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente l'inclusione di E in $E \oplus H$).

Integrali contenenti un parametro

Siano E uno spazio vettoriale e $f : [a, b] \to E$ continua. Esiste un unico $I \in E$ detto *integrale di f su* $[a, b]$ (e che verrà indicato con $\int_a^b f(t)dt$) tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista $\delta > 0$ tale che per ogni successione $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ con $| x_{i-1}, x_i | \leq \delta$ per $i = 1, \ldots n$, sia

$$| \sum_1^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - I | < \epsilon$$

Si è qui supposto che sia $a \leq b$; se $b \leq a$ definiamo $\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$.

Proposizione 2 *$f \to \int_a^b f(t)dt$ è una applicazione lineare continua di $C^0([a, b])$ in $\mathbb{R}$ la cui norma è $|b - a|$ (quindi $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq |(b - a)| \cdot sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$)*

Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, T uno spazio topologico. Le applicazioni $f : \Omega \times T \to F$ possono essere pensate come famiglie di applicazioni da Ω in F parametrizzate da T. In tal caso potremo porre $f(x, t) = f_t(x)$ per

$(x,t) \in \Omega \times T$. La notazione $df_t(x)$ indicherà allora il differenziale della funzione $f_t : \Omega \to F$ nel punto $x \in \Omega$.

Def. $C^1_T(\Omega, F)$ è l'insieme delle $f : \Omega \times T \to F$ che sono continue, tali che per ogni $t \in T, f_t : \Omega \to F$ sia differenziabile e tali che $df_t : \Omega \times T \to \mathcal{L}(E,F)$ sia continua. Analogamente si definiscono le $C^k_T(\Omega, F)$ per $k \geq 2$ o $k = \infty$.

Teorema 3 *Siano $a < b$ e $f \in C^1_{[a,b]}(\Omega, F)$. Allora la funzione $g : \Omega \to F$ definita da $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ è di classe C^1 ed il suo differenziale è $dg = \int_a^b df(x,t)dt$ (l'integrale al secondo membro è fatto in $\mathcal{L}(E,F)$).*

Corollario 4 *Se nel teorema precedente si suppone $f \in C^k_{[a,b]}(\Omega, F), k \geq 1$ allora $g \in C^k(\Omega, F)$.*

dim. del teorema
Continuità di g : siano $x_0 \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Vogliamo trovare un intorno U di x_0 in Ω tale che per $x \in U$ sia $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Essendo f continua su $\Omega \times [a,b]$,per ogni $t \in [a,b]$ esiste un intorno A_t di (x_0, t) in $\Omega \times [a,b]$ tale che per $(y,s) \in A_t$ sia $|f(y,s) - f(x_0,t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.
Ora tale intorno può supporsi del tipo $U_t \times I_t$ con U_t, I_t aperti negli spazi Ω e $[a,b]$. Per compattezza di $[a,b]$, esistono $t_1, \cdots, t_r$ tali che $I_1 \cup \cdots \cup I_r = [a,b]$. Allora per $x \in U = U_{t_1} \cap \cdots \cap U_{t_r}$ e qualsiasi $t \in [a,b]$ si ha :

$$|g(x) - g(x_o)| = |\int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t)dt| < (b-a) \cdot \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon.$$

Differenziabilità di g : bisogna mostrare che g è differenziabile nel punto $x_0 \in \Omega$ e che il suo differenziale è $\int_a^b df(x_0,t)dt$. Ciò significa che :

$$\lim_{\substack{x_0+h \in \Omega \\ h \to 0}} \frac{\int_a^b (f(x_0+h,t) - f(x_0,t))dt - (\int_a^b df_t(x_0)dt)[h]}{\|h\|} = 0$$

Ora si ha :

$$(\int_a^b df_t(x_0)dt)[h] = \int_a^b df_t(x_0)[h]dt$$

(si noti che l'integrale nel membro di sinistra è fatto in $\mathcal{L}(E,F)$ mentre quello a destra è fatto in F)
Quindi si deve mostrare che va a zero l'integrale:

$$\int_a^b (\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - df_t(x_0)[h]}{\|h\|})dt$$

Consideriamo la funzione $\sigma : [0,1] \to U$ definita da $\sigma(t) = x_0 + th$. Allora (teorema di Torricelli) si ha :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f \circ \sigma(1) - f \circ \sigma(0) = \int_0^1 d(f \circ \sigma) =$$

$$= \int_0^1 df_t(x_0 + sh) \cdot \sigma'(s)ds = \int_0^1 df_t(x_0+sh)[h]ds$$

Sostituendo nell'espressione precedente ci si riduce a mostrare che va a zero l'espressione:

$$\frac{1}{||h||}\int_a^b (\int_0^1 (df_t(x_0+sh)-df_t(x_0))ds)dt[h]$$

Essendo $df_t(x)$ continua su $\Omega \times [a,b]$, lo stesso ragionamento utilizzato per mostrare la continuità di g , mostra che la norma di $df_t(x_0+sh)-df_t(x_0)$ è maggiorata da una qualsiasi prefissata costante positiva per h in qualche intorno dell'origine e da ciò segue facilmente che tutto l'integrale va a zero.

Teorema di divisione elementare

Siano E, F spazi vettoriali ; un aperto Ω in $E \times F$ è detto *stellato* rispetto ad E se per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$, tutto il segmento $[(x_0, 0), (x_0, y_0)]$ è contenuto in Ω.

Teorema 5 (divisione elementare) *Siano $\Omega \subset E \times F$ un aperto stellato rispetto a E ed $f : \Omega \to G$ una applicazione differenziabile nulla su $\Omega \cap E \times \{0\}$; (ossia tale che $f(x_0, 0) = 0$ per ogni $(x_0, 0) \in \Omega$). Esiste allora una applicazione differenziabile $g : \Omega \to \mathcal{L}(F, G)$ tale che per $(x, y) \in \Omega$ sia $f(x, y) = g(x, y)[y]$*

dim. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ fissato. Consideriamo la funzione $\tilde{f} : [0, 1] \to G$ definita da $\tilde{f}(t) = f(x_0, ty_0)$. Per il teorema di Torricelli, si ha:

$$f(x_0, y_0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \int_0^1 d\tilde{f} = \int_0^1 (df_x(x_0, ty_0)[y_0]) =$$

$$= (\int_0^1 df_x(x_0, ty_0))[y_0] = g(x_0, y_0)[y_0]$$

ove df_x dipende differenziabilmente da x_o, y_0, t; i risultati del paragrafo precedente assicurano quindi che g è differenziabile.

Applicazioni polinomiali

Siano E, F spazi vettoriali. Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio omogeneo di grado* p se esiste una $b : E^p \to F$ $p-$lineare tale che per ogni $x \in E$ sia $\phi(x) = b(x, \cdots, x)$. Diremo che ϕ è la *contrazione* di b. Si verifica facilmente (facendo una media su permutazioni delle variabili) che se ϕ è un tale polinomio, fra tutte le $p-$lineari di cui esso è contrazione, ve ne è esattamente una che sia simmetrica : essa verrà detta la *polarizzazione* di ϕ.
Ne segue che $\mathcal{L}_p(E, F)$ ={polinomi omogenei di grado p da E a F } è uno spazio vettoriale (è in corrispondenza biunivoca con le applicazioni $p-$lineari simmetriche da E ad F).
Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio di grado* $\leq n$ se $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_p$ ove $\phi_i : E \to F$ è un polinimio omogeneo di grado p.
Se Ω è un aperto in $E \times F$ e $g : \Omega \to \mathcal{L}_p(F, G)$ è differenziabile, allora $(x, y) \to g(x, y)[y]$ (che è ovviamente differenziabile) sarà detta un *polinomio omogeneo di grado* p in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su Ω.

Sviluppi di Taylor

Siano Ω un aperto in $E \times F$ stellato rispetto ad E, $\Omega_0 = \Omega \cap E \times \{0\}$ e sia $f : \Omega \to G$ differenziabile. Allora $f(x,y) - f(x,o) : \Omega \to G$ è nulla su Ω_0 ; quindi per il teorema precedente, esiste $R_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F,G)$ tale che $f(x,y) - f(x,0) = R_0(x,y)[y]$. Posto $f(x,0) = \phi_0(x)$ questa relazione si scrive:

(1) $\quad f(x,y) = \phi_0(x) + R_0(x,y)[y]$

che verrà chiamata *sviluppo di Taylor d'ordine* 0 di f rispetto a y. Sviluppando d'ordine zero R_0, si ottiene una relazione del tipo $R_0(x,y) = \phi_1(x,y) + \tilde{R}_0(x,y)[y]$ ove $\phi_1 : \Omega_0 \to \mathcal{L}_1(F,G), \tilde{R}_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F, \mathcal{L}_1(F,G))$. Quindi $\tilde{R}_0$ associa ad ogni punto (x_0, y_0) di Ω, una applicazione bilineare su F a valori in G la cui contrazione è un polinomio omogeneo di grado due da F a G che indicheremo con $R_1(x,y)$. Sostituendo nella (1) si ottiene ;

$$f(x,y) = \phi_0(x) + \phi_1(x)[y] + (R_1(x,y)[y]$$

che è lo *sviluppo di Taylor d'ordine* 1: dice che f è un polinomio di grado uno in y a coefficienti $\mathcal{C}^\infty$ in x più un *resto* che è un polinomio omogeneo di grado due in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in x, y. Iterando la procedura si ottiene:

Teorema 6 (Sviluppo di Taylor) *Se Ω e f sono come sopra, esistono applicazioni differenziabili $\phi_p : \Omega_0 \to \mathcal{L}_p(F,G)$ e $R_p : \Omega \to \mathcal{L}_p(F,G)$ per $p \in \mathbb{N}$ tali che per $n \in \mathbb{N}$ sia :*

(2) $$f(x,y) = \sum_{h=0}^{n} \phi_h(x)[y] + R_{n+1}(x,y)[y].$$

Nota. Derivando successivamente ambo i membri di (2) e calcolando per $y = 0$ si ottiene che $\phi_p(x) = \frac{1}{p!} d^p f_x(0)$ (attenzione alle notazioni che possono trarre in inganno: si ricordi che $f_x(y)$ è per definizione $f(x,y)$).
Ne segue che le ϕ_h in (2) sono univocamente determinate.
Per quanto riguarda i resti $R_{n+1}(x,y)[y]$, essi non sono univocamente determinati dalle richieste fatte (lo sarebbero se si chiedesse una proprietà supplettiva che qui non esplicitiamo perchè non avremo necessità di avvalercene). Ciò accade perché un polinomio omogeneo a coefficienti C^∞ non (formalmente) nullo può rappresentare la funzione identicamente nulla, a differenza di quel che accade per polinomi a coefficienti costanti (ad esempio la funzione nulla su $\mathbb{R}^2$ può essere scritta $h_1(x_1,x_2)x_1 + h_2(x_1,x_2)x_2$ con $h_1(x_1,x_2) = x_2$ e $h_2(x_1,x_2) = -x_1$).

Quel che spesso è sufficiente sapere dei resti R_n è precisato dalla seguente:

Proposizione 7
Se Ω, f sono come sopra, ogni $(x_0, 0) \in \Omega$ ha un intorno aperto $U = A \times B \subset \Omega$, con A, B aperti in E, F, tale che

$$\lim_{y \to 0} \frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{\|y\|^n} = 0 \text{ uniformemente per } x \in A.$$

dim. Siano infatti U un aperto in Ω ed M un numero reale tali che $\|R_{n+1}(x,y)\| \leq M$ per $(x,y) \in U$. Allora, essendo R_{n+1} un polinomio omogeneo di grado $n+1$, si ha che:

$$\frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{\|y\|^n} = \|y\| R_{n+1}(x,y)[\frac{y}{\|y\|}]$$

avrà norma $\leq \|y\| M$.

Scritture in termini di coordinate

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate su $E = \mathbb{R}^n$, un polinomio omogeneo $\phi : E \to \mathbb{R}$ di grado d si scrive ordinariamente nel seguente modo:

$$\phi(x) = \sum_{|I|=d} a_I \cdot x^I$$

ove per le usuali convenzioni di multiindici: se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, si pone $|I| = i_1 + \cdots + i_n$ e $x^I = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$.
Nello sviluppo di Taylor di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha una somma di tali polinomi omogenei più un ultimo termine R_{n+1}, il "resto", che è ancora espresso da una scrittura dello stesso tipo con la sola differenza che i "coefficienti" a_I invece che costanti sono funzioni differenziabili:

$$R_{n+1} = \sum_{|I|=n+1} a_I(x) \cdot x^I$$

Utilizzo del linguaggio algebrico

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; l'insieme delle funzioni differenziabili $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dotato delle ovvie operazioni di somma e prodotto costituisce un anello commutativo che indicheremo con $\mathcal{E}(\Omega)$. Per $x_0 \in \Omega$ si ha un omomorfismo

$$\mathcal{E}(\Omega) \ni f \overset{\sigma}{\mapsto} f(x_0) \in \mathbb{R}$$

il cui nucleo è un ideale massimale che indicheremo con $\mathfrak{m}_{x_0}(\Omega)$.
Si ha quindi una successione esatta :

$$0 \to \mathfrak{m}_{x_0}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R} \to 0$$

la quale *spezza*, ossia è dato un omomorfismo $j : \mathbb{R} \to \mathcal{E}(\Omega)$ tale che $\sigma \circ j = id_{\mathbb{R}}$: quello che associa allo scalare λ la funzione che vale λ su tutto Ω.
Per semplicità di notazioni supponiamo $x_0 = 0$. Per il teorema di divisione elementare sappiamo che se Ω è stellato in 0 allora l'ideale $\mathfrak{m}_0(\Omega)$ è generato dalle funzioni $x_1, \ldots, x_n$; da ciò si deducono formalmente gli sviluppi di Taylor di ordine finito per ogni elemento in $\mathcal{E}(\Omega)$ validi su tutto Ω.
Nota. Siano X una varietà differenziabile connessa di dimensione n ed x_0 un suo punto. Supponiamo che l'ideale $\mathfrak{m}_{x_0}$ in $\mathcal{E}(X)$ sia generato da n elementi $f_1, ..., f_n \in \mathcal{E}(X)$; si ouò dimostrare che ciò equivale a richiedere che tali f_i si annullano simultaneamente solo in x_0 e che in tal punto esse costituiscono un sistema di cordinate locali. Allora, ogni $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ ha "sviluppi di Taylor" nelle $f_1, ..., f_n$ espressi nell'anello $\mathcal{E}(X)$. Tramite considerazioni di topologia differenziale, si può dimostrare che tali f_i non possono esistere se X è compatta (se danno un sistema di coordinate locali in x_0 allora devono qualche altro zero in comune su X). Se X è compatta, allora $\mathfrak{m}_{x_0}$ possiede un sistema di generatori finito $f_1, ..., f_m$ di funzioni globali (si può prendere $m = n + 1$) e si possono allora scrivere gli sviluppi di Taylor nelle f_i ma si perde l'unicità di tali scritture polinomiali.
Nel seguito ci occuperemo solo di questioni di tipo locale analizzando di una funzione su una varietà solo il comportamento di essa nelle vicinanze di un punto fissato. Perciò potremo supporre che la varietà sia $\mathbb{R}^n$ e che il punto sia

l'origine delle coordiante.
Consideriamo la totalità delle coppie (U, f) ove $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto contenente l'origine ed $f : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile; due tali coppie $(U, f), (U', f')$ saranno dette equivalenti se esiste un altro aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine e tale che $V \subset U \cap U'$ e $f_{|V} = f'_{|V}$. Le classi di equivalenza saranno dette *germi di funzioni differenziabili* all'origine in $\mathbb{R}^n$ e l'insieme da esse costituito verrà indicato con $\mathcal{E}(n)$. E' chiaro che la somma e il prodotto di funzioni inducono operazioni su $\mathcal{E}(n)$ con le quali esso diviene un anello commutativo. Si ha ancora una successione esatta che spezza:

$$o \to \mathfrak{m}(n) \to \mathcal{E}(n) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R} \to 0$$

ove σ associa alla classe di equivalenza di (U, f) il valore di f in 0 e conseguentemente $\mathfrak{m}(n)$ è l'ideale dei germi "nulli" in 0. Il teorema di divisione discusso precedentemente assicura che dare un sistema di coordinate all'intorno dell'origine (e di centro l'origine) in $\mathbb{R}^n$ equivale a dare un sistema di generatori per $\mathfrak{m}(n)$ fatto di n elementi.

Risultati ottenuti con metodi elementari

Siano $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$ l'insieme dei germi di funzioni differenziabili in 0 di R^n e sia $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(n)$ il suo ideale massimale.
Per $f \in \mathcal{E}$, indicheremo con $J = J(f)$ l'ideale generato in $\mathcal{E}$ dalle $\partial f/\partial x_i$ per $i = 1, \ldots, n$: esso sarà detto *ideale iacobiano* di f.
Nota. Apparentemente l'ideale iacobiano di f dipende dalle coordinate utilizzare per calcolare le derivate; ma è facile dimostrare che con un altro sistema di coordinate, si ottiene lo stesso ideale (anche se ovviamente le nuove derivate saranno in generale diverse: esse forniranno un nuovo sistema di generatori di tale ideale).
Diremo che f è *singolare* se $J \neq \mathcal{E}$ ossia J è propriamente contenuto in $\mathcal{E}$; diremo che f ha una *singolarità isolata* se è singolare ed esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $J \supset \mathfrak{m}^k$. Due germi $f_0, f_1 \in \mathcal{E}$ sono detti *equivalenti* se esiste un (germe di) diffeomorfismo ψ di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se tale che $f_1 = f_0 \circ \psi$. Una f singolare è detta di *determinazione finita* se esiste un intero naturale p tale che ogni g differenziabile che ha lo stesso sviluppo di Taylor d'ordine p di f , è equivalente ad f. In tal caso diremo anche che f è $p-$*determinata*.

Teorema 8 *Siano $f, g \in \mathcal{E}$ con f singolare e $g \in J(f)^2\mathfrak{m}$. Allora f è equivalente a $f + g$.*

Corollario 9 *Ogni singolarità isolata è di determinazione finita. Più precisamente se $f \in \mathcal{E}$ è tale che $J(f) \supset \mathfrak{m}^k$ allora f è $2k-$determinata.*

Dim. (del corollario) Nelle ipotesi fatte sia $\tilde{f} = f + g$ con $g \in \mathfrak{m}^{2k+1}$. Essendo $J(f) \supset \mathfrak{m}^k$ si ha $J(f)^2 \supset \mathfrak{m}^{2k}$ e quindi $g \in \mathfrak{m}^{2k+1} \subset J(f)^2\mathfrak{m}$ e si applica il teorema precedente.

Prima di dimostrare il teorema, facciamo vedere come se ne può dedurre facilmente il lemma di Morse. Premettiamo il seguente :

Lemma 10 *Sia $f \in \mathcal{E}$ singolare. Allora $det(\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$ se e solo se $J(f) = \mathfrak{m}$.*

(In tal caso f è detta *di Morse* o *non degenere*)
Dim. Sia $det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(0) \neq 0$; allora l'applicazione:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$$

di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se è localmente invertibile. Quindi esistono funzioni differenziabili $F_1, \ldots, F_n$ nulle in 0 e tali che

$x_i = F_i(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ per $i = 1, \ldots, n$. Essendo $F_i(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ (sviluppo di Taylor) si ottiene $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ e quindi $\mathfrak{m} \subset J(f)$; l'inclusione $J(f) \subset \mathfrak{m}$ è assicurata dal fatto che f è singolare.
Viceversa se $J(f) = \mathfrak{m}$, allora si ha $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ih} \partial f/\partial x_h$. Derivando rispetto a x_j e calcolando per $x = 0$ si ha $\delta_{ij} = \sum_{h=1}^n G_{ih}(0)(\partial^2 f/\partial x_h \partial x_j)(0)$ il che mostra l'invertibilità di $\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j$.
Da questo lemma e dal precedente corollario si ottiene il seguente:

Corollario 11 *Se f è di Morse e $g \in \mathfrak{m}^3$, allora f è equivalente a $f + g$. In particolare f è equivalente al proprio sviluppo di Taylor d'ordine due.*

Dim. (del teorema) Sia U un aperto contenente $0 \in \mathbb{R}^n$ su cui f e g sono definite e si consideri la funzione $f(x) + tg(x)$ definita su $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, restringendo tale funzione a $t = t_0$, si ottiene un germe di funzione $f(x) + t_0 g(x)$ in $0 \in \mathbb{R}^n$ che indicheremo con f_{t_0}. Mostreremo che per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, f_{t_0} è equivalente a tutte le f_t con t sufficientemente vicino a t_0 . Ne seguirà che tutte le f_t sono equivalenti tra loro.
Esaminiamo dapprima il caso $t_0 = 0$
Consideriamo un (germe di) campo di vettori all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ del tipo $(X(x,t), 1)$ con $X(0,t) = 0$; seguendo le linee integrali di tale campo otteniamo un germe $\psi_t : (\mathbb{R}^n, 0) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definito da : $\psi_t(x) =$ posizione al tempo t partendo per $t = 0$ da $(x, 0)$ e per t piccolo ψ_t è un cambiamento di coordinate locali all'origine di $\mathbb{R}^n$. Cercheremo di costruire $X(x,t)$ in modo che le ψ_t trasformino le $f + tg$ nella f; ciò equivale a richiedere che la funzione $(f + tg) \circ \psi_t$ non dipenda da t, o in altri termini che $\dfrac{\partial}{\partial t}((f + tg) \circ \psi_t) = 0$ che si scrive:

$$< \bigtriangledown f + t \bigtriangledown g, X > + g = 0$$

Esplicitamente vogliamo delle $X_i(x,t)$ per $i = 1, \ldots, n$ tali che $X_i(0,t) = 0$ e

$$\sum_{i=1}^n X_i(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + -g(x)$$

Per dimostrare che tali X_i esistono , ricordiamo che per ipotesi $g \in \mathfrak{m} J^2$ cosicchè

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (\delta_{ij} + t m_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Tale relazione è invertibile in un intorno dell'origine (perchè $det(\delta_{ij} + t m_{ij}) = 1$ per $x = 0$) . Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n h_{ij}(\frac{\partial f}{\partial x_j} + t\frac{\partial g}{\partial x_j})$$

ove le h_{ij} sono funzioni differenziabili definite vicino all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Siccome per ipotesi $g \in \mathfrak{m}J(f)$ si avrà una eguaglianza del tipo

$$g = \sum_{i=1}^{n} n_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con le $n_i(0) = 0$. Assieme alla relazione precedente si ottiene quindi

$$-g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} -n_i(x) h_{ij}(x,t) (\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t \frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

Questa relazione può essere anche scritta :

$$-g = \sum_{j=1}^{n} X_j(x,t) (\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t \frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

ove le $X_j = \sum_{i=1}^{n} n(x) h_{ij}(x,t)$ sono nulle per $x = 0$ e quindi sono le componenti di un campo avente le proprietà richieste.
Sia ora $t_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi; basterà esaminare la famiglia $f + (t_0 + t)g = (f + t_0 g) + tg = f_{t_0} + tg$ vicino a $t = 0$. Se mostriamo che f e f_{t_0} hanno lo stesso ideale jacobiano, saranno riapplicabili le argomentazioni svolte sopra per il caso $t_0 = 0$ e la dimostrazione sarà conclusa.
Osserviamo che da $g \in J^2(f) \cdot \mathfrak{m}$, ricordando che $J(f) \subset \mathfrak{m}$, si ha $\partial g / \partial x_i \in J(f) \cdot \mathfrak{m}$. Da ciò seguono relazioni

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n} mij \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ove le m_{ij} sono nulle per $x = 0$ e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n} (\delta_{ij} + t_0 m_{ij}) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

per cui $J(f_{t_0}) \subset J(f)$; la relazione inversa è conseguenza del fatto che la matrice $(\delta_{ij} + t_0 m_{ij})$ ha determinante che vale 1 all'origine ed è quindi invertibile.

Mostriamo ora un altro risultato detto ancora lemma di Morse (o teorema Babilonese o splitting lemma) per la cui dimostrazione utilizzeremo il seguente lemma (che è un teorema di divisione elementare)

Lemma 12 *Sia* $k : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *un germe di applicazione differenziabile tale che* $x \to k(x, 0)$ *sia un diffeomorfismo locale. Allora per ogni* $\alpha \in \mathcal{E}(n+m)$ *esistono* $a : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *e* $b \in \mathcal{E}(m)$ *tali che*

$$\alpha(x,y) =< k(x,y), a(x,y) > -b(y)$$

Dim. Sia $\chi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tale che $\chi(k(x,y), y) = x$ (per costruirla si inverta $(x,y) \to (k(x,y), y)$). Quindi si ha $\alpha(x,y) = \alpha(\chi(k(x,y),y),y)$. Sia $\phi(z,y) \in \mathcal{E}(n+m)$ definita da $\phi(z,y) = \alpha(\chi(k(z,y),y),y)$. Si ha

$$\phi(z,y) = \phi(0,y) + < \sigma(z,y), z >$$

con $\sigma(z,y) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Ponendo $z = k(x,y)$ si ha

$$\alpha(x,y) = \phi(k(x,y),y) = \phi(0,y) + < \sigma(k(x,y),y), k(x,y) >$$

Teorema 13 *Sia $f \in \mathcal{E}(m)$ singolare e tale che*

$$rk(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = n$$

Allora, modulo un cambiamento di coordinate

$$(\mathbb{R}^m, 0) \simeq (\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^c, 0) = \{(x, y, z)\}$$

si ha $f(x, y, z) = ||x||^2 - ||y||^2 + g(z)$ ove $a + b = n$ e $g \in \mathfrak{m}^3(c)$.

Dim. Sia f definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \{(x, \lambda, t)\}$ e sia dato un campo di vettori $\dot{x} = a(x, \lambda, t)$, $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{t} = 1$. Integrando si ottiene un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^{n+p+1}$ in se : quello che ad (x, λ, t) associa il punto $(\sigma(x, \lambda, t), \lambda, t)$ in cui arriva $(x, \lambda, 0)$ dopo un tempo t. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma(x, \lambda, t), \lambda, t) =< \bigtriangledown_x f, a > + \frac{\partial f}{\partial t} = b(\sigma(x, \lambda, t), \lambda t)$$

ove tutto è calcolato in $\sigma(x, \lambda, t)$. Supponiamo che $a(x, \lambda, t)$ sia tale che $b(x, \lambda, t)$ non dipenda da x e si costruisca $B(\lambda, t)$ di modo che sia $B(\lambda, 0) = 0$ e $\frac{\partial B}{\partial t}(\lambda, t) = b_0(\lambda, t)$. Allora $f(\sigma(x, \lambda, t), \lambda, t) - B(\lambda, t)$ non dipende da t , quindi coincide con $f(x, \lambda, 0)$. Si ha così

$$f(x, \lambda, 0) + B(\lambda t) = f(\sigma(x, \lambda, t), \lambda, t)$$

e quindi f è equivalente a $f(x, \lambda, 0) + B(\lambda, t)$.

Sia ora data f come nelle ipotesi del teorema ; si scelgano coordinate $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, t$ in $\mathbb{R}^m$ con n massimale di modo che la matrice $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ sia non singolare. Allora il lemma precedente assicura l'esistenza di una funzione a come sopra di modo che $f(x, \lambda, t)$ è equivalente a $f(x, \lambda, 0) + B(\lambda, t)$ per qualche funzione B. Questa costruzione si può applicare nuovamente alla funzione $f(x, \lambda, 0)$ (chiamando t una delle λ_i) e così procedendo si arriva a dimostrare che f è equivalente a $f(x, 0, 0)+$ una funzione delle altre variabili. E' chiaro allora come la dimostrazione possa essere conclusa utilizzando il lemma di Morse ordinario.

Mostriamo ora un esempio di applicazione del risultato precedente. Ricordiamo che una forma quadratica su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{R}$ è la contrazione di una forma bilineare simmetrica su V univocamente determinata dalla condizione che per ogni $v \in V$ sia $\phi(v) = b(v, v)$. La "spazio nullo" di ϕ è l'insieme $N(\phi)$ dei $v \in V$ per i quali $b(v, w) = 0$ qualunque sia $w \in V$.

Proposizione 14 *Supponiamo che $f \in \mathcal{E}(n)$ sia singolare in 0 e che lo spazio nullo del suo hessiano (cioè del termine di secondo grado del suo sviluppo di Taylor) sia generato da un vettore non nullo v.*
Se $(d^i f/dv^i)(0) = 0$ per $i = 1, ..., p - 1$ ed è non nulla per $i = p$ allora in un opportuno sistema di coordinate si ha:

$$f(x_1, ..., x_n) = \pm x_1^2 \pm .... \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^p$$

(i segni sono individuati dalla segnatura dell' hessiano e dal segno delle derivata $p-$esima rispetto a v)

Nota. La dimostrazione del lemma di Morse viene data solitamente usando un ragionamento analogo a quello gol quale si determina la formula risolutiva per l'equazione di secondo grado (che sembra fosse già noto ai babilonesi) ossia quello usualmente seguita anche per ottenere la diagonalizzazione delle forme quadratiche su $\mathbb{R}$; essa è molto più semplice della dimostrazione data qui. Con la stessa procedura si può cercare di dimostrare anche lo splitting lemma discusso sopra, ma la formulazione che si ottiene in tal modo è più debole: nell'enunciato che abbiamo dato sopra: il "resto" g non sarebbe a priori indipendente dalla variabili x ed y.

Deformazioni versali

I risultati esposti nel precedente paragrafo possono essere considerati teoremi di rappresentazione locale (cioè come si comporta la funzione in qualche intorno del punto in esame) a partire da informazioni puntuali, ossia la conoscenza del valore di alcune sue derivate nel punto). Essi mostrano infatti casi in cui avendo certe informazioni sullo sviluppo di Taylor in un punto, si riesce a conoscere il comportamento qualitativo della funzione.

Esamineremo adesso un'altra problematica : data $f \in \mathcal{E}(n)$, come sono fatte le $\tilde{f}$ "vicine" a f ? Prima di dare precise definizioni di cosa intendiamo con tale frase, illustreremo con un esempio semplice quale è l'idea di base.
Consideriamo il germe in 0 della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4$. Essa è evidentemente convessa con un solo minimo all'origine; se ce ne fosse richiesto un disegno del grafico, in prima approssimazione lo disegneremmo come quello di una parabola. Consideriamo ora la famiglia di funzioni $f_t(x) = x^4 + tx^2$ ove t è considerato come un parametro; la precedente f è ottenibile ponendo $t = 0$. Come è fatta f_t per t non nullo? E' facile verificare che per $t > 0$, essa ha ancora un grafico convesso con un solo minimo come prima ma che per $t < 0$ si ottiene una funzione con tre punti critici: un massimo locale all'origine preceduto e seguito da minimi locali.
Complichiamo un altro po' le cose: consideriamo la famiglia di funzioni $f_{t,s}(x) = x^4 + tx^2 + sx$ ove t, s sono considerati come parametri. Per $t = s = 0$ si ottiene la funzione f considerata inizialmente. Che comportamente ha la $f_{t,s}$ per t, s non entrambi nulli? Cercando per quali valori di t, s la funzione ha un punto "critico degenere" ossia nel quale si annullano la prima e la seconda derivata, si deve "eliminare" la variabile x tra le equazioni:

$$f'_{t,s}(x) = 4x^3 + 2tx + s = 0$$

$$f''_{t,s}(x) = 12x^2 + 2t = 0$$

La prima relazione risolta in s ed elevata al quadrato contiene solo potenze pari di x e queste possono essere eliminate risolvendo la seconda relazione in x^2. Si ottiene (se non vado errato) l'equazione :

$$27s^2 + 8t^3 = 0$$

che rappresenta una curva (cuspide) Δ che divide il piano di t, s in due zone: una "interna" A (quella che contiene la parte negativa dell'asse delle x) e l'altra

"esterna" B. Per valori dei parametri in A la funzione ha tre punti critici non degeneri (due minimi ed un massimo locali) mentre per valori dei parametri in B si hanno funzioni con un solo punto critico non degenere. La curva stessa è unione di un ramo superiore Δ_+ ove si ha $s > 0$ ed uno inferiore Δ_- ove $s < 0$. Per valori del parametro in Δ_+ la funzione ha due punti critici $x_1 < x_2$ che sono rispettivamente un flesso discendente ed un minimo locale mentre per valori dei parametri in Δ_- la funzione ha due punti critici $x_1 < x_2$ che sono rispettivamente un minimo locale ed un flesso ascendente. Infine per valori dei parametri entrambi nulli si ha la funzione di partenza di cui studiamo le perturbazioni e che ha un solo punto critico (minimo degenere).
La curva Δ con la decomposizione in rami superiore ed inferiore e punto origine viene detta "discriminante" o "diagramma di biforcazione" della famiglia di funzioni esaminata. Si noti che così come il comportamento qualitativo (ossia numero delle soluzioni) dell'equazione di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$ è determinato dalla conoscenza della nullità o segno del discriminante $b^2 - 4c$, in modo analogo il "comportamento qualitativo" della funzione $f_{t,s}(x)$ è dato dal segno del "discriminante" $27s^2 + 8t^3$ o se questo è nullo dal segno del parametro s che in questo caso funge da "secondo discriminante".
Si noti che (probabilmente) considerazioni analoghe sono state già fatte in studi pre-universitari analizzando come sono messe le soluzioni di una equazione $x^2 + bx + c = 0$ rispetto all'origine (ossia quante ve ne siano negative nulle o positive) oppure rispetto a "limiti" $k_1 < k_2 < ... < k_p$ pre-assegnati in $\mathbb{R}$.

Le questioni sui germi di funzioni che ora esamineremo saranno (nel caso ad esempio della funzione x^4) più o meno del tipo seguente: la famiglia di funzioni $x^4 + tx^2 + sx$ descrive tutto quel che può succedere perturbando la $f(x) = x^4$? La risposta che troveremo in questo particolare caso dopo aver dato definizioni precise e dimostrato alcuni teoremi sarà "quasi si" nel senso che occorre un altro parametro che però non influisce sui discriminanti; precisamente troveremo che una famiglia "completa" di deformazioni di x^4 (diremo una famiglia "versale") è la:

$$f_{s,t,r}(x) = x^4 + tx^2 + sx + r$$

Passiamo adesso a dare delle definizioni precise.
Una *deformazione* a p -parametri di un germe $f_0 \in \mathcal{E}(n)$ è una $f \in \mathcal{E}(n+p)$ che estende la f_0 : ossia $f(x,u)$ è tale che $f(x,0) = f_0(x)$, ove (x,u) sono le variabili in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Se $f(x,u)$ è una deformazione a p - parametri di f_0 e $u = \phi(v)$ è un germe di applicazione differenziabile di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in $(\mathbb{R}^p, 0)$, indicheremo con $\phi^*(f)$ la deformazione a q -parametri definita da $\phi^*(f)(x,v) = f(x,\phi(v))$. Essa verrà detta *deformazione indotta* da f per il *cambiamento di parametri* ϕ.
Diremo *isomorfe* due deformazioni di f_0 nello stesso numero di parametri p , che siano ottenibili l'una dall'altra per composizione con un diffeomorfismo di $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ in se del tipo $(x,u) \to (\phi(x,u), u)$ con $\phi(x,0) = x$.
Una deformazione sarà detta *banale* se è isomorfa alla *deformazione costante* $f(x,u) = f_0(x)$. Una deformazione f di f_0 è detta *versale* se ogni altra deformazione di f_0 è isomorfa ad una indotta da f per qualche cambiamento di parametri.
Cercheremo ora di determinare quando una deformazione di f_0 è versale. Sia $f(x,u)$ una deformazione a p -parametri di f_0. Le funzioni $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)$ sono

dette *velocità iniziali* della deformazione nelle direzioni $u_1, \ldots, u_p$. Diremo che f è *formalmente versale* se $A(f_0) = \mathcal{E}(n)/J(f_0)$ è generato , come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dalle velocità iniziali di f_0.

Teorema 15 *Una deformazione versale è formalmente versale.*

Dim. Sia $f(x, u_1, \ldots, u_p)$ versale per f_0. Data una qualsiasi $g \in \mathcal{E}(n)$, $f_0(x) + tg(x)$ è una deformazione ad un parametro di f_0. Quindi essa deve essere isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametro. Osia devono esistere $u_1(t), \ldots, u_p(t) \in \mathcal{E}(1)$, con $u_i(0) = 0$, tali che $f(x, u_1(t), \ldots, u_p(t))$ sia isomorfa a $f_0(x) + tg(x)$; quindi deve esistere $\sigma(x,t) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, o)$ con $\sigma(x, 0) = x$ e tale che $f(\sigma(x,t), u_1(t), \ldots, u_p(t)) = f_0(x) + tg(x)$. Derivando rispetto a t e calcolando per $t = 0$ si ottiene :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(x,0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)\dot{u}_i(0) = g(x)$$

quindi g è somma di un elemento di $J(f_0)$ con una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle velocità iniziali (si noti che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0) = \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x)$).

Il seguente teorema (reciproco del precedente) non è dimostrabile col solo ricorso al teorema di divisione elementare; nel seguito mostreremo come con tecniche analoghe a quelle utilizzate sino ad ora la dimostrazione possa essere ridotta alla esistenza di campi di vettori le cui componenti soddisfano certi sistemi di equazioni. La risolubilità di tali sistemi sarà ricondotta tramite tecniche di algebra commutativa (lemma di Nakayama , teorema di preparazione) ad un risultato che viene detto "teorema di divisione differenziabile" il quale non verrà dimostrato che nel corso del prossimo semestre dopo aver introdotto le funzioni di variabile complessa. Sino ad allora quindi la dimostrazione del seguente teorema, così come le applicazioni allo studio dei germi pari e simmetrici che se ne farà, sarà incompleta.

Teorema 16 *Una deformazione formalmente versale è versale.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{E}(n+p)$ una deformazione formalmente versale di $f_0(x) \in \mathcal{E}(n)$. Quindi $f(x,0) = f_0(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x,0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial u_p}(x,0)$ generano $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ su $\mathbb{R}$. Sia $g(x,v) \in \mathcal{E}(n+q)$ una deformazione qualsiasi di $f_0(x)$. Consideriamo la *deformazione somma* di f e g : $F(x,u,v) \in \mathcal{E}(n+p+q)$ definita da $F(x,u,v) = f(x,u) + g(x,v) - f_0(x)$. Tale F "contiene" sia f che g (come restrizioni a $v = 0$ e $u = 0$ rispettivamente). Quindi per mostrare che g è isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametri, sarà sufficiente mostrare che F è isomorfa ad una indotta da f per cambiamento di parametri. Il teorema precedente sarà così dimostrato dal seguente lemma applicato q volte.

Lemma 17 *Sia $F(x, u_1, \ldots, u_m, t) \in \mathcal{E}(n+m+1)$ una deformazione a $m+1$ parametri di $f_0(x) \in \mathcal{E}(n)$, tale che $\partial F/\partial u_1(x,0,0), \ldots, \partial F/\partial u_m(x,0,0)$ generino $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ su $\mathbb{R}$. Detta $F_0(x,u)$ la deformazione a m parametri indotta da F per $t = 0$ (ossia $F_0(x,u) = F(x,u,0)$), esiste un germe differenziabile (una retrazione) $h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ con $h(u,0) = u$ e tale che F è isomorfa alla deformazione indotta da F_0 tramite h.*

Dim. Cerchiamo germi $a(u,t)$ e $b(x,u,t)$ tali che detta $\phi(x,u,t), h(u,t), t)$ la posizione ove cui arriva il punto $(x,u,0)$ dopo aver seguito per un tempo t il campo $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = a(u,t)$ $\dot{x} = b(x,u,t)$, si abbia

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} F(\phi(x,u,t), h(u,t), t) \equiv 0$$

cosicchè

$$F(\phi(x,u,t), h(u,t), t) = F(x,u,0)$$

Quindi cambiando parametri in $F(x,u,t)$ con la $(u,t) \to (h(u,t),t)$ si ottiene una deformazione isomorfa a $F(x,u,0)$.
La condizione (1) equivale alla :

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,t) b_i(x,u,t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_j}(x,u,t) a_j(u,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x,u,t) = 0$$

Dobbiamo quindi dimostrare che la (2) , considerata come equazione nelle a_j, b_i, è risolubile. Quel che sappiamo è che "riducendo" modulo le u, t tale equazione diviene risolubile; ossia ponendo eguali a zero nella (2) le u, t , si ottiene una equazione in incognite b_i funzioni (germi) nelle x e a_j costanti la cui risolubilità è precisamente l'ipotesi del teorema. La dimostrazione sarà quindi completa se dimostriamo il teorema che segue: siano (x,u) le variabili in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$; per ogni $f \in \mathcal{E}(n+p)$ indichiamo con $\bar{f} \in \mathcal{E}(n)$ il germe di funzione definito da $\bar{f}(x) = f(x,0)$. Evidentemente $f \to \bar{f}$ è un omomorfismo surgettivo. Se $I \subset \mathcal{E}(n+p)$ è un ideale, indichiamo con $\bar{I}$ la sua immagine in $\mathcal{E}(n)$ (si verifica subito che $\bar{I}$ è un ideale in $\mathcal{E}(n)$ perchè l'omomorfismo $\mathcal{E}(n+p) \to \mathcal{E}(n)$ è surgettivo).

Teorema 18 *Siano $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{E}(n+p)$ e sia I un ideale in $\mathcal{E}(n+p)$. Sono fatti equivalenti :*

a) $\bar{I} + \mathbb{R}\bar{g}_1 + \cdots + \mathbb{R}\bar{g}_r = \mathcal{E}(n)$

b) $I + \mathcal{E}(p)g_1 + \cdots + \mathcal{E}(p)g_r = \mathcal{E}(n+p)$

La dimostrazione di questo teorema sarà ricondotta nel prossimo paragrafo ad un risultato (detto teorema di divisione) che sarà dimostrato dopo aver introdotto le funzioni di variabile complessa.
Si noti che la caratterizzazione trovata delle deformazioni versali può essere riassunta nella seguente "ricetta" per costruirle:
sia $f_0 \in \mathcal{E}(n)$ un germe singolare; affinchè esso possieda una deformazione versale, l'anello $A(f_0)$ deve essere uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Se così è , si scelgano $g_1, \cdots, g_p \in \mathcal{E}(n)$ le cui classi in $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ siano un sistema di generatori su $\mathbb{R}$. Allora $f(x, u_1, \ldots, u_p) = f_0(x) + u_1 g_1(x) + \ldots + u_p g_p(x))$ è una deformazione versale di f_0. Si deduce anche che la dimensione di $A(f_0)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è la dimensione minimale d'una deformazione versale e che ogni due deformazioni versali della stessa f_0 aventi lo stesso numero di parametri, sono isomorfe.

Il teorema di preparazione

Diremo che $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ è $p-$regolare in t per $p \in \mathbb{N}$ se

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \cdots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0,0) \quad e \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0,0) \neq 0$$

ossia se la restrizione di f all'asse t si annulla d'ordine esattamente p.

Teorema 19 *Siano $f(x,t), g(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ germi con f che è $p-$regolare in t. Allora esistono $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ e $h_j(x) \in \mathcal{E}(n)$, $j = 1, \dots, p$ tali che:*

$$g(x,t) = Q(x,t) \cdot f(x,t) + h_1(x)t^{p-1} + \cdots + h_p(x)$$

Ossia si può "dividere" g per f ottenendo per resto un polinomio in t di grado $p-1$ a coefficienti in $\mathcal{E}(n)$.
O ancora in altri termini : $\mathcal{E}(n+1)$/ideale generato da f è generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ da $1, t, \dots, t^{p-1}$

Nota. Questo risultato viene detto teorema di divisione differenziabile (di Malgrange) e non sarà dimostrato. Una dimostrazione dell'analogo (teorema di preparazione di Weierstrass) nel caso analitico sarà fatta più avanti nel capitolo sulle funzioni di più variabili complesse; in tale occasione verranno anche indicate le modifiche necessarie per rendere valida tale dimostrazione anche nel caso C^∞.

Corollario 20 *Sia $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ un germe $p-$regolare in t.*
Esistono germi $u_1(x), \dots, u_p(x) \in \mathcal{E}(n)$ e $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ tali che $u_i(0) = 0$ per $i = 1, \dots, p$, $\;Q(0,0) \neq 0$ e per cui :

$$f(x,t) = Q(x,t)(t^p + u_1(x)t^{p-1} + \cdots + u_p(x))$$

Dim. E' ottenuta (a meno di segni) dividendo come nel precedente teorema la funzione $g(x,t) = t^p$ per f.

Descriviamo ora una formulazione più algebrica del teorema di preparazione, che viene detta *teorema di preparazione nella forma di J.Mather*

Sia k un corpo. Una *k-algebra locale* è il dato di un anello commutativo con identità A che contiene k, avente un unico ideale massimale $\mathfrak{m}_A$ e tale che l'omomorfismo $A \to A/\mathfrak{m}_A$ induca un isomorfismo tra k e $A/\mathfrak{m}_A$, cosicchè l'inclusione di k in A fornisce una spezzamento della successione esatta:

$$0 \to \mathfrak{m}_A \to A \to A/\mathfrak{m}_A = k \to 0$$

Ad esempio gli anelli $\mathcal{E}(n)$ sono $\mathbb{R}-$algebre locali così come i loro quozienti; al contrario se $K \supset k$ è una estensione propria (ad esempio $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$) allora K è un anello locale, perché ha un unico ideale massimale (lo (0)) ed è una $k-$algebra ma non è una $k-$algebra locale.
Un *omomorfismo* di $k-$algebre locali A , B è un omomorfismo $\phi : A \to B$ che sia l'identità su K e tale che sia "locale" nel senso che applichi l'ideale massimale di A entro l'ideale massimale di B (ossia $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$)
Oss. Si noti che k è una $k-$algebra locale e che ogni automorfismo di k come corpo che non sia l'identità non è un omomorfismo di $k-$algebre anche se è un morfismo di anelli locali. Ciò mostra che la richiesta che ϕ sia l'identità su k non può essere eliminata. Essa è però sufficiente: siano infatti A e B due $k-$algebre locali e sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli che induce l'identità su k. Allora $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$; in altri termini ogni morfismo di $k-$algebre è automaticamente un morfismo di $k-$algebre locali. Infatti se $a \in \mathfrak{m}_A$ sia $\lambda \in k$ tale che

$\phi(a) - \lambda \in \mathfrak{m}_B$. Se fosse $\lambda \neq 0$, allora $a - \lambda$ sarebbe invertibile in A e quindi $\phi(a - \lambda) = \phi(a) - \lambda$ lo sarebbe in B il che è assurdo perché esso stà nell'ideale massimale. Quindi $\lambda = 0$ ossia $\phi(a) \in \mathfrak{m}_B$.
Sia A un anello (commutativo con identità come tutti gli anelli di cui tratteremo). Un *modulo* su A è il dato di un insieme X dotato d'una struttura di gruppo abeliano e di una moltiplicazione $A \times X \to X$ indicata con $(a, x) \to a \cdot x$ che sia distributiva a sinistra e a destra rispetto alle somme su A e X, sia associativa, ed *unitaria* nel senso che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$.
Dato un insieme S, l'insieme A^S delle applicazioni $\phi : S \to A$ ha una struttura ovvia di A modulo. Il sottomodulo $A(S)$ delle $\phi : S \to A$ che sono nulle tranne un numero finito di $s \in S$, è detto $A-$*modulo libero* generato da S (o su S; vedremo nel seguito una definizione più concettuale di $A-$modulo libero generato da un insieme).
Per $r \in \mathbb{N}$ indicheremo con A^r l'$A-$modulo libero su $S = \{1, \dots, r\}$.
Un $A-$modulo è detto *finito* se è finitamente generato, ossia se è isomorfo ad un quoziente di A^r per qualche $r \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che A sia una $k-$algebra locale e che X sia un $A-$modulo. Diremo che X è *formalmente finito* su A se $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su k. Qui la notazione $\mathfrak{m}_A \cdot X$ indica il sotto $A-$modulo di X generato dai prodotti di un elemento di $\mathfrak{m}_A$ per un elemento di X; si noti che il quoziente $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è un $A-$modulo e che ogni elemento di $\mathfrak{m}_A$ annulla tutto tale modulo, cosicché esso può essere considerato come un modulo su $k = A/\mathfrak{m}_A$.
E' facile verificare che se un $A-$modulo è finito esso è anche formalmente finito. Anzi, se $x_1, \dots, x_n$ sono generatori di X su A, allora le loro immagini in $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ sono generatori di tale spazio vettoriale su k. Infatti se $x \in X$, si ha $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$; posto $a_i = \lambda_i + m_i$ con $\lambda_i \in k$ e $m_i \in \mathfrak{m}_A$ per $i = 1, \dots, n$, si avrà

$$x = \lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n + m_1x_1 + \ldots + m_nx_n$$

Il viceversa in generale è falso; ossia in generale vi sono $A-$moduli formalmente finiti che non sono finiti.
Ad esempio, se $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, $n \geq 1$, l'ideale $\mathfrak{m}_\infty = \cap_{h \geq 1}\mathfrak{m}^h$ è formalmente finito ma non finito.
Altro esempio: $A = k\{x\}$ e $X = k[[x]]$ gli anelli rispettivamente delle serie convergenti e di quelle formali su di un corpo valutato completo (come $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).
La verifica di quanto asserito per questi esempi si avvale del seguente risultato:

Lemma 21 (di Nakayama) *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se X è un $A-$modulo finito tale che $\mathfrak{m} \cdot X = X$, allora X è costituito dal solo* 0.

Dim. Siano $x_1, \dots, x_r$ generatori di X. Allora ogni $x_i \in \mathfrak{m} \cdot X$ e quindi $x_i = \sum_{i=1}^{r} h_{ij}x_j$ con $h_{ij} \in \mathfrak{m}$.
Tale relazione può essere scritta $(I - H) \cdot \bar{x} = 0$ ove I e H sono le matrici δ_{ij} e h_{ij} ed $\bar{x}$ è il vettore colonna di componenti $x_1, \dots, x_r$.
Se dimostriamo che la matrice $I - H$ è invertibile ne seguirà che $\bar{x} = 0$ e quindi $X = (0)$. Ed infatti $det(I - H) = 1 + h$ con $h \in \mathfrak{m}$ e quindi $1 + h \notin \mathfrak{m}$ è invertibile in A (perché è un anello locale) cosicché $I - H$ è invertibile.

La seguente conseguenza è spesso utile:

Teorema 22 *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale e X un $A-$modulo finito. Affinché $x_1, \ldots, x_r \in X$ siano generatori di X su A è necessario e sufficiente che essi inducano generatori di $X/(\mathfrak{m} \cdot X)$ in quanto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$*

Dim. Sia $\tilde{X}$ il quoziente di X per il sotto-A-modulo generato dagli $x_1, \ldots, x_r$. Se essi inducono generatori di $X/(\mathfrak{m} \cdot X)$ su $\mathbb{R}$, allora $\mathfrak{m} \cdot \tilde{X} = \tilde{X}$. Essendo questo finitamente generato il lemma precedente assicura che esso è nullo.

Nel primo degli esempi precedenti si ha $\mathfrak{m}_\infty = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_\infty$; quindi se $\mathfrak{m}_\infty$ fosse finitamente generato su $\mathcal{E}(n)$, esso sarebbe nullo. Basterà quindi mostrare che esiste un germe di funzione C^∞ non nullo ma con sviluppo di Taylor identicamente nullo.
Per il secondo si ha che se $\mathfrak{m}$ indica l'ideale massimale di $\mathbb{R}\{x\}$ allora $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{R}[[x]]$ è l'ideale massimale di $\mathbb{R}[[x]]$ (entrambi tali ideali massimali sono infatti generati da $x_1, \ldots, x_n$). Se $\mathbb{R}[[x]]$ fosse finito su $\mathbb{R}\{x\}$ per il teorema precedente esso sarebbe generato da 1, ossia coinciderebbe con $\mathbb{R}\{x\}$.
Quindi basterà esibire una serie formale che non sia convergente in nessun intorno dell'origine.
Nota. Dal lemma di Nakayama si deduce facilmente che la condizione di esistenza di una deformazione versale per f, ossia il fatto che $\mathcal{E}(f)/J(f)$ abbia dimensione finita come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ equivale al fatto che f abbia in 0 una singolarità isolata, ossia che l'ideale jacobiano $J(f)$ contenga qualche potenza dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, che è la condizione per un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ di essere di determinazione finita.

Il teorema di preparazione nella forma di J.Mather, assicura che in certi casi, un modulo formalmente finito è finito.
Premettiamo ancora qualche definizione:
Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli (supporremo sempre che gli omomorfismi siano *unitari*, ossia $\phi(1_A) = 1_B$). Se X è un $B-$modulo, esso può essere considerato anche come $A-$modulo tramite ϕ: definiamo il prodotto tra un $x \in A$ ed un $x \in X$ con la formula $a \cdot x = \phi(a) \cdot x$.
Def. Un omomorfismo $\phi : A \to B$ di $\mathbb{R}-$algebre è detto *preparabile* se ogni modulo finito su B che sia formalmente finito su A è anche finito su A.

Teorema 23 *Ogni omomorfismo $\phi : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(m)$ ottenuto da un germe differenziabile $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definendo $\phi(g) = g \circ f$, è preparabile.*

Osservazioni.
1. Se $\phi : A \to B$ è surgettiva, essa è preparabile; anzi i generatori di X su B costituiscono anche un sistema di generatori per X su A.
2. Se $\phi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ sono preparabili, anche $\psi \circ \phi : A \to C$ lo è. Infatti in tal caso se X è un $C-$modulo, si ha $\mathfrak{m}_A \cdot X \subset \mathfrak{m}_B \cdot X$ perché $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$, e quindi $\dim_{\mathbb{R}} X/(\mathfrak{m}_A \cdot X) \geq dim_{\mathbb{R}} X/(\mathfrak{m}_B \cdot X)$. Quindi se X è finito su C e formalmente finito su A, è anche formalmente finito su B, quindi essendo ψ preparabile è finito su B. Essendo poi ϕ preparabile, esso sarà finito su A.

Le osservazioni precedenti permettono di limitare la dimostrazione del precedente teorema al solo caso che f sia la proiezione $p : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (ossia $p(x,t) = x$). Infatti ogni (germe in 0 di) applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, è

composizione della $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ definita da $g(x) = (x, f(x))$ con la proiezione h di $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ sul secondo fattore. Coseguentemente l'omomorfismo $f^* : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ indotto da f sarà composizione di h^* con g^*. Se mostriamo che p^* è preparabile, allora anche h^* lo sarà (perché composizione di n fattori del tipo di p^*). Per quanto riguarda g^* essa è certamente preparabile perché surgettiva; infatti con un opportuno cambiamento di coordinate nel codominio, g diviene l'inclusione $\mathbb{R}^n \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$.
Esaminiamo quindi la seguente situazione: X un modulo sull'anello dei germi in $(x, t) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ finitamente generato diciamo da $x_1, \ldots, x_r \in X$ e tale che quozientandolo per l'$\mathcal{E}(n)-$modulo $\mathfrak{m}(n) \cdot X$ generato dai prodotti di germi in x nulli all'origine per elementi di X, si ottenga uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita; allargando eventualmente il sistema di generatori di X su $\mathcal{E}(n+1)$, possiamo supporre che un suo sistema di generatori di tale spazio vettoriale sia fornito dalle immagini in esso di $x_1, \ldots, x_r$.
Quindi ogni $x \in X$ si può scrivere

$$x = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{j=1}^{r} z_j x_j$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e le z_j somme di prodotti di germi in x nulli in 0 per germi in x, t. In particolare per $i = 1, \ldots, r$ si ha

$$tx_i = \sum_{j=1}^{r} (c_{ij} + z_{ij}) x_j$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{r} (t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_j = 0$$

Indichiamo con $\Delta(x, t) \in \mathcal{E}(n+1)$ il determinante della matrice (b_{ij}) e sia B_{ij} una matrice (a coefficienti in $\mathcal{E}(n+1)$) il cui prodotto con la matrice (b_{ij}) sia la matrice identità moltiplicata per $\Delta(x, t)$. Si ha allora $\Delta \cdot \bar{x} = 0$, essendo $\bar{x}$ il vettore verticale di componenti $x_1, \ldots, x_r$. Quindi Δ annulla tutti gli x_i ed essendo questi generatori di X esso annulla tutto X. Ne segue che X è un modulo (finitamente generato) sull'anello quoziente di $\mathcal{E}(n+1)$ per l'ideale generato da Δ. Mostreremo ora che tale quoziente è finitamente generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ ossia sull'anello dei germi in $x \in \mathbb{R}^n$; ne seguirà che anche X è finito su $\mathcal{E}(n)$ e la dimostrazione sarà conclusa.
Osserviamo per prima cosa che $\Delta(x, t)$ è $q-$regolare rispetto a t per qualche q tra 1 e r: infatti $\Delta(0, t)$ è essenzialmente il polinomio caratteristico della matrice (c_{ij}) che è un polinomio monico di grado r.
Il teorema di divisione assicura allora che $\mathcal{E}(n+1)/(\Delta)$ è un modulo su $\mathcal{E}(n)$ generato da $1, t, \ldots, t^{q-1}$: infatti per ogni $g(x, t) \in \mathcal{E}(n+1)$ si ha una relazione

$$g(x, t) = Q(x, t)\Delta(x, t) + \alpha_1(x)t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x)$$

e quindi

$$g(x, t) \equiv \alpha_1(x)t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x) \qquad (mod(\Delta))$$

Germi pari

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *pari* se verifica la condizione $f(x) = f(-x)$: sarà detto invece *dispari* se si ha $f(-x) = -f(x)$. E' facile convincersi che se $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ è un polinomio, allora esso è pari se e solo se "è" un polinomio nelle $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.
Vediamo che ciò è vero anche per funzioni differenziabili, nel senso precisato dal seguente:

Teorema 24 *Sia $f \in \mathcal{E}(n)$ un germe pari. Esiste allora qualche (germe di) funzione F differenziabile nelle $m = n(n+1)/2$ variabili Y_{ij} per $1 \leq i \leq j \leq n$ tale che f è ottenuta da F sostituendo le $x_i x_j$ alle Y_{ij}.*

Dim. Consideriamo l'applicazione $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ le cui componenti sono i monomi $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$ e sia $\phi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo ad essa associato. E' chiaro che l'ideale $\phi(\mathfrak{m}(m)) \subset \mathcal{E}(n)$ coincide con il quadrato $\mathfrak{m}^2(n)$ dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$. Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è un $\mathcal{E}(m)$ modulo quasi finito ed è quindi finito per il teorema di preparazione. Anzi possiamo anche dedurne che esso è generato come $\mathcal{E}(m)-$modulo da 1 e $x_1, \ldots, x_n$. In altre parole ogni $f \in \mathcal{E}(n)$ si può scrivere

$$f = g + \sum_1^N h_r x_r$$

ove g e le h_r sono ottenute da funzioni in $\mathcal{E}(m)$ (tale scrittura non è univocamente determinata: ad esempio $x_1^2 x_2$ può scrversi sia $(x_1^2) \cdot x_2$ che $(x_1 x_2) \cdot x_1$).
Tale eguaglianza esprime f come somma di una funzione pari e una dispari ed è quindi chiaro che se f è pari, dovrà essere $f = g$. Si noti che in questo modo si vede anche che ogni f dispari è esprimibile come combinazione di $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti funzioni pari.
In modo del tutto analogo si dimostra che se un germe in $\mathcal{E}(n)$ cambia segno ogni volta che si cambia segno ad una sua variabile, allora può essere espresso come una funzione differenziabile dei quadrati x_i^2 delle coordinate.

Germi simmetrici

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *simmetrico* se per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ si ha :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

E' noto dall'algebra che l'insieme dei polinomi $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ che sono simmetrici costituiscono una sottoalgebra isomorfa all'anello dei polinomi in n variabili. Ad esempio un sistema di generatori indipendenti è costituito dai polinomi $P_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$ per $1 \leq k \leq n$. In altri termini si dimostra che per ogni polinomio P simmetrico nelle $x_1, \ldots, x_n$ esiste uno ed un sol polinomio Q in n variabili tale che:

$$P(X_1, \ldots, X_n) = Q(P_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, P_n(X_1, \ldots, X_n))$$

Un altra lista di polinomi simmetrici che genera in modo indipendente tutti gli altri, è quella costituita dai *polinomi simmetrici elementari* (da preferirsi all'altra in molte occasioni, tra l'altro perché funziona anche in caratteristica positiva) che sono costruiti svolgendo il prodotto:

$$(t - X_1) \cdot \ldots \cdot (t - X_n) = \sum_0^n t^i \sigma_{n-i}(x)$$

e prendendo i polinomi $(-1)^i \sigma_i(x)$ per $i = 1, \ldots, n$.
In particolare $\sigma_1(x) = x_1 + \ldots + x_n$ e $\sigma_n(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.
In altre parole i polinomi (o funzioni, come più spesso vengono chiamati) simmetriche elementari calcolate in $x_1, \ldots, x_n$ sono (a parte i segni) i coefficienti dell'unico polinomio monico di grado n che ha come radici $x_1, \ldots, x_n$.
Per $j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha quindi:

$$\sum_0^n x_j^i \sigma_{n-i}(x) = 0$$

che può essere scritta anche:

$$x_j^n = \sum_1^n x_j^i \sigma_{n-i}$$

Da ciò si deduce che detta $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ l'applicazione con componenti σ_i, e detto $\sigma^* : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo associato, Sia si ha:

$$x_j^n \in \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. In particolare ogni monomio di grado almeno n^n appartiene a tale ideale cosicché per k sufficientemente alto si ha

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è finitamente generato come modulo sulla algebra delle funzioni simmetriche ed anzi che è generato da un numero finito di polinomi (ad esempio dai monomi di grado inferiore a n^n). Se $f \in \mathcal{E}(n)$ è un germe simmetrico, esso si può quindi scrivere :

$$f(x) = \sum_1^N Q_r(x) \cdot F_r(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$$

ove le Q_r sono polinomi e le F_r germi differenziabili. Facendo operare il gruppo simmetrico si può supporre che anche i Q_r siano simmetrici; applicando allora il risultato di algebra richiamato sopra, si deduce che anche esse possono essere scritte some funzioni (polinomiali) delle σ_i; si è quindi dimostrato che ogni germe simmetrico può essere scritto come una funzione differenziabile delle funzioni simmetriche elementari.

Equazioni di sottoinsiemi

Mostriamo un ultimo esempio di applicazione del teorema di preparazione.
Il teorema di divisione elementare assicura che nell'anello $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni differenziabili su $\mathbb{R}^2$ con coordinate x, y, l'ideale di quelle nulle sull'asse delle

ascisse è generato dalla funzione y. E' facile dedurne che se $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ si annulla sul luogo di zeri della funzione $x \cdot y$ allora $f = x \cdot y \cdot h$ con $h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$: è sufficiente "dividere" la f per y e poi per x. Mostriamo ora che la stessa cosa avviene per la funzione $y^2 - x^3$, (ossia che essa genera l'ideale di "definizione" della curva Δ suo luogo di zeri) utilizzando il teorema di divisione di Malgrange: esso fornisce infatti per ogni germe $f \in \mathcal{E}(2)$ una relazione del tipo:

$$(*) \qquad f(x,y) = h(x,y)(y^2 - x^3) + ya(x) + b(x)$$

valida in un qualche intorno dell'origine. Se f è il germe di una funzione che si annulla su Δ anche $ya(x) + b(x)$ deve farlo. Allora $a(x)$ deve essere identicamente nulla: se esistesse x_0 con $a(x_0) \neq 0$, si avrebbe esattamente un solo y per cui $ya(x_0) + b(x_0) = 0$ mentre per la $(*)$ dovrebbero esservene due se $x_0 > 0$ e nessuno se $x_0 < 0$. Quindi $a(x)$ è identicamente nulla. Con analogo ragionamento anche $b(x)$ deve essere identicamente nulla. Ciò mostra che la funzione $f(x,y)/(y^2 - x^3)$ differenziabile su $\mathbb{R}^2 - \Delta$ ha una estenzione differenziabile su un aperto contenente l'origine. Che essa si estende differenziabilmente anche sopra gli altri punti di Δ segue dal fatto che in essi il differenziale di $y^2 - x^3$ non è nullo e può quindi essere applicato il teorema di divisione elementare.